

APROXIMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN EN EL SUELO CON SERIE DE FOURIER

Solution of the Soil Water Diffusion Lineal Equation with Series of Fourier

Gilberto López-Canteñs^{1‡}, José A. Ostos-Santos¹, Abraham Rojano-Aguilar¹,
Antonio Vázquez-Alarcón² y Eduardo Arteaga-Tovar¹

RESUMEN

El aplicar la ecuación de difusión para conocer el movimiento del agua en el suelo es complejo, debido a que requiere de aproximaciones numéricas. A pesar de existir varias aproximaciones numéricas en el mundo, se siguen probando diferentes métodos que permitan solucionar esta ecuación diferencial parcial lineal. El presente trabajo tiene como objetivo resolver la ecuación de difusión de humedad en el suelo; se aplicó la serie de Fourier, siendo validado el modelo obtenido para un suelo arcilloso. Se muestra el desarrollo matemático para la solución de la misma y obtención de la ecuación para el término B_n de la serie de Fourier que, posteriormente, se comparó con la solución analítica. Se lograron valores de humedad similares, con residuos que oscilan entre 0.0710 y $-0.0090 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ y errores de 7% que pueden considerarse pequeños, debido a la variabilidad espacial de la humedad en el suelo. También se muestra la relación que involucra la humedad con la variable tiempo y distancia para suelos arenosos y arcillosos, y que es de gran utilidad práctica en los estudios agrícolas y de contaminación de suelos.

Palabras clave: zona no saturada, ecuación de Richard unidimensional, difusividad de la humedad.

SUMMARY

The application of the diffusion equation in porous media is complex due to numerical approximations involved. Even though there are various numerical approximations proposed, new approaches are being tested. This work was conducted to solve the soil moisture diffusion equation; the Fourier series was

applied, validating the model obtained in a clay soil. In this application, mathematical development is shown for solution of the equation and for generating the equation for the B_n coefficients of the sine series, which was later compared with the analytical solution. Similar moisture values were obtained with residues ranging between 0.0710 and $-0.0090 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ with a an error of 7% which is insignificant considering the high variability found in real soils. Also shown is the association moisture with time and distance for sand and clay soils which has practical applications in agriculture and soil pollution.

Index words: unsaturated zone, one-dimensional Richard's equation, water diffusivity.

INTRODUCCIÓN

La relación de la capacidad de almacenaje y el movimiento del agua en los suelos con la porosidad es evidente y fundamental. Sin embargo, no es sólo la cantidad total de poros en el sólido la que define el comportamiento hídrico del suelo, sino también, y, en muchos casos de manera predominante, son las características específicas del sistema de poros, en términos de forma, tamaño y distribución que definen esa relación (Gil, 2004).

Desde el punto de vista agronómico, la distribución del tamaño de poros no sólo incide sobre la cantidad de agua que puede retener el suelo, sino que regula la energía con que la misma está retenida y también el movimiento hacia la planta, la atmósfera y otras zonas del suelo; procesos regulados por diferencias de estados de energía.

El movimiento del agua en la zona no saturada del suelo es de vital importancia para el riego de los cultivos y la recuperación de suelos afectados por excesos de humedad. En los últimos años, se han desarrollado numerosos modelos de simulación que permiten conocer la dinámica de la humedad en el suelo, por ejemplo, SWACROP (Kabbat *et al.*, 1992) e HYDRUS

¹Departamento de Irrigación, ²Departamento de Suelos, Universidad Autónoma Chapingo. 56230 Chapingo, estado de México.

[‡] Autor responsable (alelopez10@hotmail.com)

(Simunek *et al.*, 1998), los cuales aplican la ecuación unidimensional de Richard que, al incluir la difusividad del agua, se conoce como ecuación de difusión.

Esta ecuación se ha utilizado ampliamente para estudiar el flujo en la zona no saturada del suelo con fines agrícolas (Dierckx *et al.*, 1986). No obstante, debido a que es una ecuación diferencial parcial lineal, no es posible obtener soluciones analíticas, por lo que se emplean aproximaciones numéricas que hacen más compleja y difícil la aplicación de la misma.

El movimiento del agua en el perfil del suelo, en general, se describe utilizando la ecuación de difusión unidimensional. Soluciones cuasianalíticas de dicha ecuación, sujeta a condiciones iniciales y de contorno bastante restrictivas y simples, han desarrollado Phillip (1957) y Parlange (1972). Las predicciones obtenidas con estas soluciones son bastante cercanas a las observaciones en pruebas de laboratorio. Sin embargo, la descripción de la infiltración, en condiciones de campo, se complica mucho, ya que las condiciones iniciales y de contorno no son constantes y las propiedades del suelo pueden variar en el espacio y tiempo. Por esta razón, a partir de la década de los sesenta, se han realizado numerosos esfuerzos en la búsqueda de soluciones numéricas (Whisler y Klute, 1965; De Wit y Van Keulen, 1972).

Freeze (1969) presentó una lista de trabajos con soluciones de la ecuación de difusión unidimensional, junto con las condiciones iniciales y de contorno utilizadas en cada trabajo. Esta revisión demuestra la gran variedad de soluciones en forma de diferencias finitas para la ecuación no lineal, así como varias maneras de discretización utilizadas.

Warrick (2003) presentó una solución para la ecuación de Richard unidimensional y consideró que la difusividad del agua en el suelo es constante; para ello, utilizó la transformada de Laplace y obtuvo una ecuación que incluye la función de error complementario que involucra los diferentes estados de humedad en el suelo.

Chounet *et al.* (1999) aplicaron el método del elemento finito mixto para la discretización espacial de la ecuación para calcular la presión del líquido en suelos arcillosos, francos y arenosos. La ecuación para la presión del líquido es elíptica-parabólica; se comporta, de forma elíptica en la parte saturada de la curva y parabólica cuando se aproxima a la región no saturada. Por su parte, Al-Lawatia *et al.* (1999) resolvieron la ecuación de difusión-advención aplicando el método de las características con una aproximación de segundo

orden Runge-Kutta y lo compararon con otras soluciones numéricas obtenidas con los métodos de Galerkin y alta resolución.

Köhn *et al.* (2004) aplicaron la ecuación de difusión-advención a la simulación del transporte de contaminantes no reactivos (conservativos), la cual se resolvió con el uso de dos métodos numéricos: 1) esquemas de diferencias finitas TVD (Total Variation Diminishing) y 2) el método de las características. Con respecto al primero, en los años recientes, se ha alcanzado alta resolución en la obtención de perfiles que representan discontinuidades, eliminando oscilaciones espurias de la solución numérica y logrando la convergencia deseada (Dahle *et al.*, 1990). El problema algebraico asociado al método TVD consiste en la resolución de un sistema de ecuaciones con una matriz no simétrica. El segundo procedimiento numérico, utilizado para la resolución de la ecuación de transporte, es un método iterativo mixto de características, lo que permite eliminar la falta de simetría debido a la presencia del término convectivo y evita las oscilaciones numéricas espurias.

Debido a la importancia que tiene el conocer el movimiento del agua en el suelo, tanto para fines agrícolas, como para estudios de contaminación, el trabajo tiene como objetivo resolver la ecuación de difusión aplicando series de Fourier y compararla con los resultados obtenidos mediante la transformada de Laplace.

MATERIALES Y MÉTODOS

El suelo arcilloso tiene una humedad de saturación de $0.382 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ y humedad residual de $0.09 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$, mientras que, para el suelo arenoso, estos valores fueron de 0.430 y $0.045 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$, respectivamente, obtenidos a partir de las curvas características de humedad en el suelo, determinadas mediante la caja de arena y la prensa de Richard (Eijkelkamp, Giesbeek, Países Bajos).

La difusividad para el suelo arcilloso es de $0.005 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ y para el suelo arenoso de $0.008 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, valores que se obtuvieron aplicando el software RETC (Van Genuchten *et al.*, 2000) a las curvas características de humedad del suelo en laboratorio.

La ecuación de difusión no es más que la de Richard, basada en la humedad para una dimensión, considerando la difusividad del agua en el suelo constante y despreciando el término gravedad; se representa como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (1)$$

donde: D es la difusividad, en $\text{cm}^2 \text{min}^{-1}$; t es el tiempo, en min; x es la distancia, en m; θ es la humedad, en $\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$.

Para comparar la solución de la Ecuación 1, aplicando series de Fourier, se utilizó la ecuación obtenida mediante la transformada de Laplace (Warrick, 2003), que es:

$$\theta(x,t) = (\theta_{sat} - \theta_{res}) \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2(Dt)^{0.5}} \right] + \theta_{res} \quad (2)$$

donde: erfc es la función de error complementario; θ_{sat} es la humedad de saturación, en cm^3 ; θ_{res} es la humedad residual, en $\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$.

La evaluación del modelo obtenido se realizó al comparar los valores de humedad, calculados por ambas soluciones a la ecuación de difusión; siguió dos criterios: uno, tabular y, otro, estadístico. Para la evaluación tabular, se compararon los valores de humedad, obtenidos por las soluciones numéricas para iguales intervalos de distancia y tiempo; se realizó una valoración cualitativa de similitud entre ambos. El segundo criterio de ajuste fue cuantitativo y en él se utilizaron los estadígrafos: error relativo, error estándar, desviación absoluta y desviación de la media. Estos parámetros son indicativos de la dispersión entre los valores de humedad, obtenidos por ambos modelos.

El error relativo (Er) se calcula como:

$$Er = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{\theta_{TL} - \theta_{SF}}{\theta_{TL}} \right) \times 100 \quad (3)$$

El error estándar (SE) se calcula como:

$$SE = \sqrt{\frac{\sum (\theta_{TL} - \theta_{SF})^2}{n}} \quad (4)$$

La desviación absoluta (AD) se calcula como:

$$AD = \frac{\sum |\theta_{TL} - \theta_{SF}|}{n} \quad (5)$$

La desviación de la media (M_d) se calcula como:

$$M_d = \frac{\sum (\theta_{TL} - \theta_{SF})}{n} \quad (6)$$

donde: θ_{TL} es la humedad obtenida por la solución a través de la transformada de Laplace ($\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$), θ_{SF} es la humedad obtenida por la solución a través de la serie de Fourier ($\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$), n es el número de distancias calculadas.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Método de Separación de Variables

Condiciones iniciales y de frontera. El método de separación de variables se aplica a las ecuaciones diferenciales parciales lineales que son homogéneas, como es el caso de la Ecuación 1.

En una región finita ($0 \leq x \leq L$) existe una solución única si se especifica el contenido de humedad en las fronteras $x = 0$ y $x = L$, conocidas como condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \theta(0,t) &= \theta_{sat} \\ \theta(L,t) &= \theta_{res} \end{aligned} \quad (7)$$

donde: L es la longitud total, m, y se da la distribución inicial ($t = 0$) de la humedad del suelo que se corresponde con la condición inicial:

$$\theta(x,0) = f(x) \quad (8)$$

Una idea clave en la separación de variables es buscar soluciones de producto sencillas, distintas de cero para la Ecuación 1 (diferencial parcial). Así, se buscan soluciones en la forma de producto:

$$\theta(x,t) = \phi(x)h(t) \quad (9)$$

Aquí $\phi(x)$ es una función de x y $h(t)$ una función de t . Sustituyendo el valor de θ de la Ecuación 9 en la Ecuación 1 y derivando se llega a:

$$\phi(x) \frac{dh}{dt} = Dh(t) \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (10)$$

Si se divide entre $D\phi(x)h(t)$, pueden separarse las variables:

$$\frac{1}{Dh} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (11)$$

Como x y t son variables independientes, la única manera de que una función de x pueda ser igual a una función de t , es si ambas funciones resultan tener la misma constante. Por conveniencia, esta constante de separación se denota por $-\lambda$.

$$\frac{1}{Dh} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda \quad (12)$$

De la ecuación anterior pueden deducirse dos ecuaciones diferenciales ordinarias: una para $h(t)$ y otra para $\phi(x)$:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda \phi \quad (13)$$

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda D h \quad (14)$$

La Ecuación 14 es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden con coeficientes constantes. La solución de la ecuación dependiente del tiempo es:

$$h(t) = c e^{-\lambda D t} \quad (15)$$

donde: la parte dependiente del tiempo decae exponencialmente si $\lambda > 0$ y crece exponencialmente si $\lambda < 0$.

Problema de Valor en la Frontera para las Constantes de Separación

Las funciones espaciales $\phi(x)$ de las soluciones de producto satisfacen la Ecuación 13. Además, se insiste en que las soluciones de productos cumplan con las condiciones de frontera. Si la forma de producto (Ecuación 9) se sustituye en la Ecuación 7 y se buscan soluciones de producto distintas de cero, es necesario que $h(t) \neq 0$, y, por lo tanto, $\phi(x)$ debe tener las condiciones de frontera.

La ecuación diferencial ordinaria para ϕ no corresponde a un problema de valor inicial, en su lugar, satisface un problema de valor en la frontera que consiste en la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda \phi \quad (16)$$

Con dos condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Para resolver el problema de valor en la frontera y encontrar los valores propios y las funciones propias correspondientes, primero se encuentra la solución general de la Ecuación 16, después se intenta satisfacer las dos condiciones de frontera (Ecuación 17).

La Ecuación 16 es una ecuación diferencial con coeficientes constantes. La ecuación característica (basada en $\phi(x) = e^{rx}$) para ésta es:

$$r^2 = -\lambda \quad (18)$$

Se demuestra, en este ejemplo, que $\lambda = 0$ no es una constante de separación permitida. Si $\lambda = 0$, entonces la Ecuación 16 es:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0$$

La solución general es:

$$\phi(x) = c_1 + c_2 x \quad (19)$$

La condición de frontera en $x = 0$, ($\phi(0) = 0$) implica que:

$$\phi(0) = c_1 + c_2(0) = c_1 \quad (20)$$

La condición de frontera en $x = L$, ($\phi(L) = 0$) implica que:

$$\phi(L) = 0 = c_2 L \quad (21)$$

así, $c_2 = 0$ y, por lo tanto, $\phi(x) = 0$ para toda x si $\lambda = 0$, lo que significa que $\lambda = 0$ no es un valor propio.

Ahora se supone que $\lambda > 0$. Las raíces de la ecuación característica (Ecuación 18), son $\pm i\sqrt{\lambda}$. La solución general de la Ecuación 16 es, entonces:

$$\phi(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda x} + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda x} \quad (22)$$

La condición de frontera en $x = 0$, implica que $\phi(0) = 0 = c_1$, y como $c_1 = 0$, se tiene que:

$$\phi(x) = c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda x} \quad (23)$$

La condición de frontera en $x = L$, implica que:

$$\phi(L) = 0 = c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda L} \quad (24)$$

Si $c_2 = 0$, entonces $\phi(x) = 0$ para toda x , pero se buscan soluciones distintas de cero. Suponiendo que $c_2 \neq 0$ (Ecuación 24), esto implica que:

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda L} = 0 \quad (25)$$

La función seno es cero para múltiplos enteros de π . Entonces, la Ecuación 25 implica que los valores propios (constantes de separación) satisfacen a:

$$\sqrt{\lambda} L = n\pi \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

o de manera equivalente:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \tag{27}$$

Se excluye $n = 0$, ya que ocurriría $\lambda = 0$, y se ha demostrado que $\lambda > 0$. Entonces, de la Ecuación 23 las funciones propias (la parte espacial de las soluciones en forma de producto) satisfacen:

$$\phi(x) = c_2 \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \tag{28}$$

La constante c_2 es arbitraria. De las Ecuaciones 15 y 28 se obtuvieron las soluciones en forma de producto:

$$\theta(x,t) = B \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda Dt} = B \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 Dt} \tag{29}$$

donde: B es una constante arbitraria de la ecuación de difusión.

Problema de Valor Inicial

Estas soluciones son análogas a las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. Para una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n existen n soluciones linealmente independientes y la solución general es una combinación lineal de estas n soluciones.

Para la ecuación diferencial parcial lineal homogénea (Ecuación 1) existe un número infinito de soluciones (Ecuación 29) para $n = 1, 2, 3, \dots$. Una combinación lineal de todas estas soluciones, en forma de producto, también será una solución:

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 Dt} \tag{30}$$

donde: las B_n son constantes arbitrarias. Para las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden n, las n constantes se determinan a partir de las n condiciones. Para la ecuación de difusión (Ecuación 1), las constantes arbitrarias B_n se determinan a partir de la condición inicial y la dependencia espacial del contenido de humedad en $t = 0$.

Verificando que la solución de la Ecuación 31 satisface las condiciones iniciales [$\theta(x,0) = f(x)$] y haciendo $t = 0$ se obtiene:

$$\theta(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{ para } 0 < x < L \tag{31}$$

La Ecuación 31 es la representación, por la serie de Fourier, de senos de la función $f(x)$ en el intervalo $0 < x < L$. Dada la condición inicial $f(x)$, los coeficientes deben ser iguales a los coeficientes de la serie de Fourier de senos, de manera que:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \tag{32}$$

La integral se toma en la región física $0 < x < L$. La Ecuación 32 se deduce multiplicando la Ecuación 31 por $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$, integrando de $x = 0$ a $x = L$ y usando el hecho de que las funciones propias $\text{sen} \frac{n\pi x}{L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ forman un conjunto ortogonal.

La solución del problema de valor inicial para la ecuación de difusión es la Ecuación 30, donde los coeficientes están dados por la Ecuación 32.

Aplicación de la Solución de la Ecuación de Difusión

Para poder aplicar las soluciones obtenidas por serie de Fourier, se hizo necesario determinar la función error complementario aplicando series de Taylor, lo cual se muestra a continuación:

$$\text{erfc}(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n+1}}{(2n+1)n!} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(u - \frac{u^3}{3 \cdot 1!} + \frac{u^5}{5 \cdot 2!} - \frac{u^7}{7 \cdot 3!} \right) \tag{33}$$

donde: el complemento (u) se le llamó a la ecuación:

$$u = \frac{x}{2(Dt)^{0.5}}$$

Cálculo de B_n para n Impares Aplicando Seno por Serie de Taylor

Debido a que la función seno involucrada en el cálculo de B_n (Ecuación 32) es oscilatoria entre -1 y 1 con intercepto en el eje x, los valores de n pares no se analizan por representar un comportamiento inverso, que se corresponde con la función coseno involucrada en el término A_n de la serie de Fourier y que pudiera ser parte de un estudio posterior más detallado.

En la Figura 1 se observa que los valores de B_n decrecen a medida que aumenta el valor de n, tendiendo a valores próximos a 0; este comportamiento es similar a lo reportado por Hildebrand (1976). Por lo que los valores máximos de B_n se alcanzarán para la distancia de 2 m, oscilando entre 1.181 para $n = 1$ y 0.062

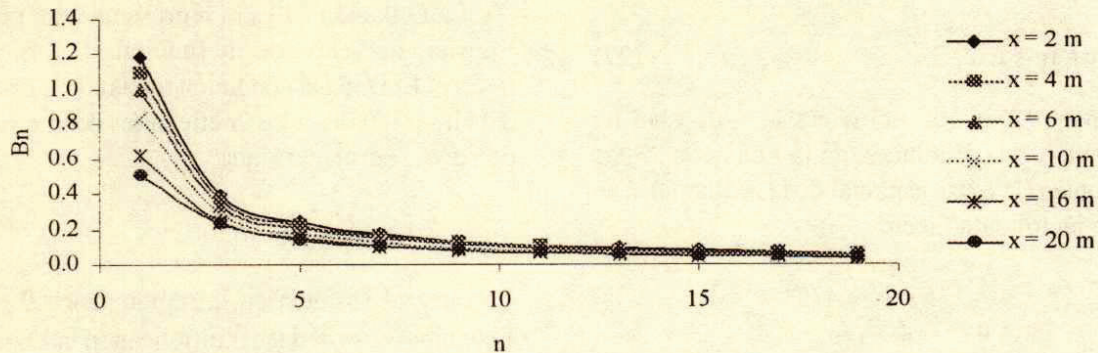


Figura 1. Representación gráfica de los B_n con respecto a 10 valores de n impares.

para $n = 19$, respectivamente, mientras que los mínimos se obtuvieron para 20 m en un intervalo desde 0.508 hasta 0.037 con iguales variaciones de n .

Estas variaciones de B_n para los diferentes valores de n repercuten, de manera significativa, en la determinación de las variaciones de humedad con la distancia, lo cual se refleja en el Cuadro 1. Los valores de humedad calculados por la ecuación obtenida, aplicando serie de Fourier, sigue la tendencia de la solución analítica, disminuyendo con la distancia, oscilando los residuales entre 0.0710 y -0.0090 cm^3 , lo que indica que se asemejan ambos modelos en la determinación del comportamiento de la humedad en la distancia. El análisis estadístico realizado corrobora lo anterior, obteniéndose un E_r de 6.9%, mientras que la SE, AD y Md fueron de 0.038, 0.029 y 0.024 cm^3 , respectivamente; esto confirma el buen ajuste que existe entre ambas soluciones cuando los valores de n son impares; no obstante, el valor obtenido para la desviación de la media muestra que la solución obtenida por series de Fourier tiende a subestimar ligeramente los valores de humedad.

Como puede apreciarse en los valores estadísticos calculados, la solución de la ecuación de difusión por serie de Fourier para n impar puede utilizarse para conocer el comportamiento de la humedad en el suelo con una buena exactitud, obteniéndose errores de aproximadamente 7%, que son pequeños si se considera que el coeficiente de variación de la humedad en el suelo oscila entre 4 y 45%, según señaló Warrick (2003).

Con los resultados anteriores se elaboró la Figura 2, la cual muestra el comportamiento de la humedad en función de la variación del tiempo y de la distancia. Las curvas reflejan una disminución de la humedad con el incremento del complemento de la función error complementario para ambos tipos de suelo analizados.

En el caso del suelo arenoso, inicia con un valor de humedad superior, en 0.047 cm^3 , al del suelo arcilloso; ambas curvas se interceptan, con respecto al eje x , en el valor de 1.25. Posteriormente, la humedad en el suelo arenoso disminuye 0.034 cm^3 , con respecto al arcilloso. El comportamiento de la humedad en el intervalo de 0 a 1 en el eje " x " se debe a que la arena es un suelo bien estructurado con poros grandes capaz de retener volúmenes de agua considerables a tensiones próximas a la saturación, mientras que el arcilloso es un suelo rojo tropical no dilatante, aunque bien estructurado, es muy evolucionado con más de 90% de partículas menores de 0.001 mm, siendo el contenido de materia orgánica bajo y de óxidos de hierro alto, los cuales tienen un marcado efecto sobre la retención del agua a tensiones bajas y medias.

Los resultados obtenidos sirven de base para conocer el comportamiento de la infiltración en la fase inicial. En general, las relaciones descriptivas de los principios físicos para los sistemas no saturados permiten conocer el tiempo y la distancia horizontal del frente de avance del agua para los distintos tipos de suelos. Esta información es de gran utilidad para el diseño y operación de sistemas de riego por gravedad y brinda los elementos necesarios relacionados con la dinámica de la humedad

Cuadro 1. Valores de humedad para la solución analítica y por serie de Fourier.

Distancia m	Solución analítica cm ³ cm ⁻³	Serie de Fourier ($n = 4$) cm ³ cm ⁻³
2	0.3397	0.2687
4	0.2988	0.2479
6	0.2605	0.2276
10	0.1955	0.1896
16	0.1321	0.1411
20	0.1098	0.1155

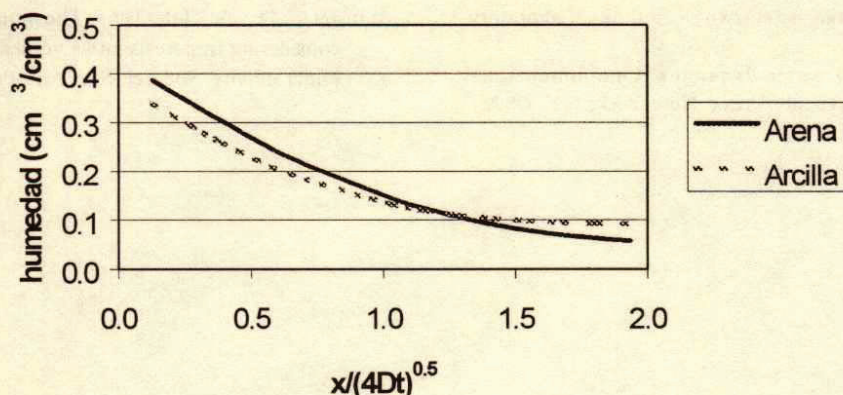


Figura 2. Relación de la humedad contra tiempo y distancia para suelo arenoso y arcilloso.

en la zona no saturada para los estudios del escurrimiento superficial y el movimiento de solutos en la parcela.

CONCLUSIONES

- Se desarrolla el procedimiento matemático para resolver la ecuación de difusión por la serie de Fourier para evaluar el comportamiento de la humedad en el suelo. Se muestra la función error complementario resuelta por serie de Taylor.

- El aplicar la ecuación en suelo arcilloso para valores de n impares refleja que existe un buen ajuste con respecto a la solución analítica. Esto demuestra que la ecuación de difusión de humedad puede utilizarse para estimaciones de humedad en la distancia, siendo los residuos entre 0.0710 y -0.0090 $\text{cm}^3 \text{cm}^{-3}$ y los errores de aproximadamente 7%. Valor que se encuentra dentro del intervalo de variación de la humedad en el suelo.

- Se obtuvo la relación de la humedad con respecto al tiempo y la distancia para suelo arenoso y arcilloso, y se observó una disminución de la misma, a medida que se incrementan los parámetros de la función error complementario.

LITERATURA CITADA

Al-Lawatia, M., R. Sharpley y H. Wang. 1999. Second-order characteristic methods for advection-diffusion equations and comparison to other schemes. *Adv. Water Resour.* 22: 241-266.

Chounet, L. M., D. Hilhorst, C. Jouron, Y. Kelanemer y P. Nicolas. 1999. Simulation of water flow and heat transfer in soils by means of a mixed finite element method. *Adv. Water Resour.* 22: 445-460.

Dahle, H. K., M. S. Espedal, R. E. Ewing y O. Savareld. 1990. Characteristic adaptive subdomain methods for reservoir flow

problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 6: 279-309.

De Wit, C. T. y H. van Keulen. 1972. Simulation of transport processes in soils. Pudoc. Wageningen, The Netherlands.

Dierckx, J., C. Belmans y P. Pauwels. 1986. SWATRER, a computer package for modelling the field water balance. Reference manual. Soil and Water Engineering. Lab. Katholieke Universiteit. Leuven, Belgium.

Freeze, R. A. 1969. The mechanism of natural groundwater recharge and discharge. 1. One-dimensional vertical, unsteady, unsaturated flow above a recharging, or discharging groundwater flow system. *Water Resour. Res.* 7: 1597-1606.

Gil, R. 2004. El comportamiento físico-funcional de los suelos. <http://www.agriculturadeprecision.org/mansit/Comportamiento%20Fisico-Funcional%20de%20Suelos.htm>. (16 diciembre 2004).

Hildebrand, F. 1976. *Advanced calculus for applications*. Second edition. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ, USA.

Kabat, P., B. van der Broek y R. Feddes. 1992. SWACROP: A water management and crop production simulation model. *Icld Bull.* 41: 61-84.

Köhn, J., E. Kruse y J. Santos. 2004. Migración de solutos en formaciones porosas saturadas. Departamento de Geofísica Aplicada. UNLP, Argentina. http://www.math-purdue.edu/~santos/papers/contaminant_transport/rio99.pdf. (7 enero 2004)

Parlange, J. 1972. Theory of water movement in soils: 8. One-dimensional infiltration with constant flux at the surface. *Soil Sci.* 114: 1-4.

Phillip, J. R. 1957. Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration dependent II. *Aust. J. Phys.* 10: 29-42.

Simunek, J., K. Huang y M. van Genuchten. 1998. The HYDRUS code for simulating the one dimensional movement of water, heat and multiple solutes in variably saturated media. Version 6.0. Research Report 144. US Salinity Laboratory. Riverside, CA, USA.

Van Genuchten, M. Th. 2001. *Soil physics companion. One-dimensional solutions*. Research Report 78 WR. 11. Princeton University. Princeton, NJ, USA.

Van Genuchten, M., J. Simunek, F. Leij y M. Sejna. 2000. RETC Version 6. Code for quantifying the hydraulic functions of

- unsaturated soils. George E. Brown Jr. Salinity Laboratory. Riverside, CA, USA.
- Warrick, A. W. 2003. Soil water dynamics. One-dimensional absorption. Oxford University Press. New York, NY, USA.
- Whisler, F. D. y A. Klute. 1965. The numerical analysis of infiltration considering hysteresis into a vertical soil column at equilibrium under gravity. Soil Sci. Soc. Am. Proc. 29: 489-494.